I/RAPPELS MATHEMATIQUES
تـــذاكـــيـــر ريـــاضـــيـة

I-A / ANALYSE DIMENSIONNELLE
الـــتـــحـــلـــيـــل الـــبـــعـــدي

1/Les unités

a/ Les unités fondamentales (الوحدات الأساسية) : Le système international des unités est constitué de 7 unités fondamentales correspondant à 7 grandeurs physiques comme le résume le tableau suivant :

Grandeurs	masse	longueur	temps	Intensité électrique	température	Quantité de matière	Intensité lumineuse
Symbole de la grandeur	M	L	T	I	θ	N	J
Nom de l'unité	kilogramme	mètre	seconde	ampère	Degré Kelvin	mole	Candela
Symbole de l'unité	kg	m	s	A	K	mol	Cd

b/ Les unités dérivées (الوحدات المشتقة) :

Toutes les unités des grandeurs physiques (à l'exception de celles précitées) dérivent des unités fondamentales cités ci-dessus.

Exemple : newton(N), joule(J), ohm(Ω)…

c/ Les unités secondaires (الوحدات الثانوية):

En plus des unités fondamentales il existe des unités secondaires pour quelques grandeurs.

Exemple : La température : degré celcius(°C), volume : litre(l), pression : atmosphère(at), énergie :calorie(cal)…

d/ Une unité supplémentaire (وحدة إضافية) :

L'unité officielle pour les angles plans est le **Radian** (rad). Elle constitue une unité supplémentaire aux sept unités citées ci-dessus.

e/ Les multiples et les sous multiples (المضاعفات و الأجزاء) :

- **Les sous multiples :**

Coefficient	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}
Préfixe	déci	centi	milli	micro	nano	pico	femto	atto
symbole	d	c	m	μ	n	p	f	a

- **Les multiples :**

Coefficient	10^{+1}	10^{+2}	10^{+3}	10^{+6}	10^{+9}	10^{+12}	10^{+15}	10^{+18}
Préfixe	déca	hecto	kilo	méga	giga	téra	péta	exa
symbole	da	h	k	M	G	T	P	E

2/ Les équations aux dimensions (المعادلات ذات الأبعاد)

a/ Définition : Dans le domaine limité de la mécanique, on appelle équation aux dimensions de la grandeur(G), le monôme de cette grandeur écrit sous la forme :

$$\boxed{[G] = M^{\alpha} L^{\beta} T^{\gamma}} \qquad \textbf{(1.1)}$$

où M,,L,T sont respectivement les symboles de la masse , de la longueur et du temps, et α ,β et γ des nombres réels.

b/ Quelle est l'utilité de cette expression ?

L'intérêt de cette expression est essentiellement l'obtention de l'unité de la grandeur (G) dans le système international des unités (الجملة الدولية للوحدات) et qui doit être sous la forme :

$$\boxed{kg^{\alpha} m^{\beta} s^{\gamma}} \qquad \textbf{(1.2)}$$

Nous allons montrer dans les exemples suivants, la méthode à suivre pour rechercher les équations aux dimensions de quelques grandeurs.

c/ Comment déterminer les exposants α ,β et γ ?

L'opération qui consiste à déterminer les nombres réels α ,β et γ s'appelle l'analyse dimensionnelle de la grandeur G.

Pour arriver à cette fin, on recherche les formules des définitions ou toute expression obtenue par une étude théorique à partir de ces définitions.

Exemples :

Exemple1 : Déterminer l'équation aux dimensions de la vitesse (السرعة) et de l'accélération (التسارع).

Réponse :

La vitesse : $V = \dfrac{x}{t} \rightarrow [V] = \dfrac{L}{T} \rightarrow [V] = LT^{-1}$ l'unité : ms^{-1}

L'accélération : $a = \dfrac{v}{t} \rightarrow [a] = \dfrac{L.T^{-1}}{T} \rightarrow [a] = L.T^{-2}$ l'unité : $m.s^{-2}$

Exemple2 : Déterminer l'équation aux dimensions de la force (القوة) et du travail(العمل).

Réponse :

La force : $F = ma \rightarrow [F] = [m].[a] \rightarrow [F] = MLT^{-2}$ l'unité : $N = kms^{-2}$

Le travail : $W = F.l \rightarrow [W] = MLT^{-2}.L \rightarrow [W] = ML^2T^{-2}$ l'unité : $kgm^2s^{-2} = N.m = J$

Exemple3 : Déterminer l'équation aux dimensions de la capacité d'un condensateur(سعة مكثفة).

Dans ce cas nous on n'est plus dans le domaine de la mécanique. Il faut donc étendre la formule (1.1).

En électromagnétisme on introduit une formule à quatre dimensions et ce en ajoutant la grandeur fondamentale de l'intensité (الشدة) dont le symbole est I.

L'expression devient :

$$\boxed{[G] = M^{\alpha} L^{\beta} T^{\gamma} I^{\delta}} \qquad \textbf{(1.3)}$$

Réponse :

$$C = \frac{Q}{V} \qquad [C] = \frac{[Q]}{[V]}$$

$$Q = It \qquad [Q] = I.T$$

$$W = Q.V \Rightarrow [V] = \frac{[W]}{[Q]} \Rightarrow [V] = \frac{ML^2T^{-2}}{IT}$$

$$[W] = ML^2T^{-2}$$

$$[C] = \frac{IT}{\dfrac{ML^2T^{-2}}{IT}} \Rightarrow [C] = M^{-1}L^{-2}T^4I^2 \text{ et l'unité : } kg^{-1}m^{-2}s^4A^2 = F(farad)$$

Exemple4 : Déterminer l'équation aux dimensions de la permittivité ε d'un condensateur (سماحية مكثفة). Peut-on l'exprimer en $N^{-1}m^{-2}C^{+2}$?

Réponse :

On sait que : $C = \varepsilon \dfrac{S}{d} \Rightarrow [\varepsilon] = [C]\, L^{-1}$

On a déjà vu que : $[C] = I^2M^{-1}L^{-2}T^4$

Donc : $[\varepsilon] = I^2M^{-1}L^{-3}T^4$

On décompose l'expression de la dimension de la permittivité obtenue en trois parties :

$$[\varepsilon] = (I^2T^2)(M^{-1}L^{-1}T^2)(L^{-2})$$

D'où la nouvelle expression de ε :

$$[Q]^2 = I^2T^2 \rightarrow C^2 \quad ; \quad [F]^{-1} = M^{-1}L^{-1}T^2 \rightarrow N^{-1} \quad ;$$

$$[L]^{-2} \rightarrow m^{-2} \qquad \Rightarrow \boxed{\varepsilon \rightarrow C^2N^{-1}m^{-2}}$$

e/ Généralisation :

Dans le cas général, l'équation aux dimensions d'une grandeur G prend la forme :

$$\boxed{[G] = M^a L^b T^c I^d \theta^e N^f J^g} \quad \textbf{(1.4)}$$

θ : symbole de la température(رمز درجة الحرارة)
N : symbole de la quantité de matière(رمز كمية المادة)
J : symbole de l'intensité lumineuse(رمز الشدة الضوئية)

Remarque : les fonctions exponentielles, logarithmiques, trigonométriques ainsi que les constantes, et tout ce qui se trouve à l'intérieur de ces fonctions ont pour dimension la valeur1.

$[x]=1 \quad [\alpha]=1 \quad [\sin\alpha]=1 \quad [e^x]=1 \quad [\log x]=1 \quad [8]=1 \quad [\pi]=1$